Problem I–1

Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

Problem I–2

Ať $n \geqslant 3$ je kladné celé číslo. Označení n vrcholů, n stran a vnitřku pravidelného n-úhelníka pomocí $2n+1$ různých celých čísel nazveme *memořádné*, jestliže platí následující podmínky:

(a) Každá strana je označena číslem rovným aritmetickému průměru čísel označujících její koncové body.

(b) Vnitřek je označen číslem rovným aritmetickému průměru všech n čísel označujících vrcholy.

Určete všechna $n \geqslant 3$, pro něž existuje memořádné označení pravidelného n-úhelníka využívající $2n+1$ po sobě jdoucích celých čísel.

Problem I–3

Označme P průsečík úhlopříček CE a BD konvexního pětiúhelníku $ABCDE$. Ukažte, že pokud platí $|\sphericalangle PAD| = |\sphericalangle ACB|$ a $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle EDA|$, pak středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ADE leží na přímce s bodem P.

Problem I–4

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $|2^m - 181^n|$, v němž m a n jsou kladná celá čísla.

Time: 5 hours
Time for questions: 60 min
Each problem is worth 8 points.
The order of the problems does not depend on their difficulty.