Aufgabe I–1

Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllen.

Aufgabe I–2

Sei $n \geqslant 3$ eine ganze Zahl. Eine Beschriftung der n Eckpunkte, der n Seiten und des Inneren eines regelmäßigen n-Ecks mit $2n+1$ verschiedenen ganzen Zahlen wird *memorabel* genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Jede Seite ist mit einer Zahl beschriftet, die das arithmetische Mittel der Zahlen an ihren Endpunkten ist.

(b) Das Innere des n-Ecks ist mit einer Zahl beschriftet, die das arithmetische Mittel der Zahlen aller Eckpunkte ist.

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geqslant 3$, für die eine memorable Beschriftung eines regelmäßigen n-Ecks existiert, die aus $2n+1$ aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht.

Aufgabe I–3

Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck. Sei P der Schnittpunkt der Geraden CE und BD. Es gelte $\sphericalangle PAD = \sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle CAP = \sphericalangle EDA$. Zeige, dass die Umkreismittelpunkte der Dreiecke ABC und ADE und der Punkt P auf einer Geraden liegen.

Aufgabe I–4

Bestimme den kleinstmöglichen Wert von

$$|2^m - 181^n|,$$

wobei m und n positive ganze Zahlen sind.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.