Problème I–1

Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont l'équation

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

pour tous nombres réels x et y.

Problème I–2

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Un étiquetage des n sommets, des n côtés et de l'intérieur d'un polygone régulier à n côtés à l'aide de $2n+1$ entiers distincts est appelé *mémorable* si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) Chaque côté a pour étiquette la moyenne arithmétique des étiquettes de ses deux extrémités.

(b) L'intérieur du polygone a pour étiquette la moyenne arithmétique des étiquettes de tous les côtés.

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un étiquetage mémorable d'un polygone régulier à n côtés constitué de $2n + 1$ entiers consécutifs.

Problème I–3

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe. Soit P l'intersection des droites CE et BD. Supposons que $\angle PAD = \angle ACB$ et $\angle CAP = \angle EDA$. Prouver que P appartient à la droite passant par les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ADE.

Problème I–4

Déterminer la plus petite valeur possible de

$$|2^m - 181^n|$$

avec m et n des entiers positifs.