Užduotis I–1

Nustatykite visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurioms lygybė

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

galioja su visais realiaisiais skaičiais x, y. (Čia $\mathbb{R}$ žymi realiųjų skaičių aibę.)

Užduotis I–2

Nagrinėkime natūralųjį skaičių $n \geqslant 3$. Taisyklingojo n-kampio vidus, visos n viršūnių ir visos n kraštinių pažymėtos skaičiais, taip panaudota $2n+1$ skirtingų skaičių. Tokį pažymėjimą vadinsime *memorabiliu*, jei galioja šios sąlygos:

(a) kiekvienos kraštinės skaičius yra abiejų jos galų skaičių aritmetinis vidurkis;

(b) n-kampio vidaus skaičius yra visų jo viršūnių skaičių aritmetinis vidurkis.

Nustatykite visas natūraliojo skaičiaus $n \geqslant 3$ reikšmes, kurioms egzistuoja memorabilus taisyklingojo n-kampio pažymėjimas, panaudojant $2n + 1$ iš eilės einančių sveikųjų skaičių.

Užduotis I–3

Duotas iškilasis penkiakampis $ABCDE$. Tiesės CE ir BD kertasi taške P. Įrodykite, kad jei $\angle PAD = \angle ACB$ ir $\angle CAP = \angle EDA$, tai trikampių ABC ir ADE apibrėžtinių apskritimų centrai bei taškas P priklauso vienai tiesei.

Užduotis I–4

Nustatykite mažiausią galimą reiškinio

$$|2^m - 181^n|$$

reikšmę, kai m ir n yra natūralieji skaičiai.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.