Zadanie I–1

Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równość

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie I–2

Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 3$. Numerację n wierzchołków, n boków oraz wnętrza n-kąta foremnego $2n+1$ różnymi liczbami całkowitymi nazwiemy *memową* jeśli spełnione są następujące warunki:

(a) Każdemu bokowi przypisano liczbę równą średniej arytmetycznej liczb przypisanych końcom tego boku.

(b) Wnętrzu n-kąta przypisano liczbę równą średniej arytmetycznej liczb przypisanych wszystkim wierzchołkom tego n-kąta.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$, dla których istnieje memowa numeracja wierzchołków, boków i wnętrza n-kąta foremnego $2n+1$ kolejnymi liczbami całkowitymi.

Zadanie I–3

Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Niech P będzie punktem przecięcia prostych CE i BD. Załóżmy, że $\angle PAD = \angle ACB$ oraz $\angle CAP = \angle EDA$. Udowodnić, że środki okręgów opisanych na trójkątach ABC i ADE oraz punkt P są współliniowe.

Zadanie I–4

Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$|2^m - 181^n|,$$

gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.