Úloha I–1

Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spĺňajúce

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x+y)$$

pre všetky reálne čísla x a y.

Úloha I–2

Nech $n \geqslant 3$ je celé číslo. Označenie n vrcholov, n strán a vnútra pravidelného n-uholníka $2n+1$ rôznymi celými číslami nazývame *priemerné*, ak sú splnené nasledovné podmienky:

(a) Každá strana je označená aritmetickým priemerom čísel na jej koncových vrcholoch.

(b) Vnútro n-uholníka je označené aritmetickým priemerom všetkých čísel na jeho vrcholoch.

Nájdite všetky celé čísla $n \geqslant 3$ také, že existuje *priemerné* označenie pravidelného n-uholníka pozostávajúce z $2n+1$ po sebe idúcich celých čísel.

Úloha I–3

Je daný konvexný päťuholník $ABCDE$. Označme P priesečník priamok CE a BD. Dokážte, že ak platí $|\measuredangle PAD| = |\measuredangle ACB|$ a $|\measuredangle CAP| = |\measuredangle EDA|$, tak bod P leží na priamke určenej stredmi kružníc opísaných trojuholníkom ABC a ADE.

Úloha I–4

Nájdite najmenšiu hodnotu výrazu

$$|2^m - 181^n|,$$

pričom m a n sú kladné celé čísla.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.