Задача T–1

Вынайдзіце ўсе пары (P, Q) мнагачленаў з рэчаіснымі каэффіцыентамі, якія задавальняюць роўнасці

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

пры ўсіх рэчаісных ліках x і y.

Задача T–2

Вынайдзіце найменшую рэчаісную канстанту C такую, што няроўнасць

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

выконваецца пры ўсіх рэчаісных ліках x, y, z, задавальняючых роўнасці $x + y + z = -1$.

Задача T–3

У кожнай клетцы квадратнай дошкі 2017×2017 размешчаны ліхтарык. Кожны ліхтарык можа быць уключаны альбо выключаны. Ліхтарык завецца дрэнным, калі ў яго цотная колькасць уключаных суседніх ліхтарыкаў. Якая найменшая магчымая колькасць дрэнных ліхтарыкаў на дошцы?

(Два ліхтарыка з'яўляюцца суседнімі, калі адпаведныя клеткі маюць агульны бок.)

Задача T–4

Няхай $n \geqslant 3$ — цэлы лік. Паслядоўнасць $P_1, P_2, \ldots, P_n$ розных пунктаў плоскасці завецца добрай, калі ніякія тры з іх не належаць адной лініі, ломаная лінія $P_1P_2 \ldots P_n$ з'яўляецца несамаперасякальнай, і трохкутнік $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ арыентаваны супраць гадзіннікавай стрэлкі для ўсіх $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Для ўсіх цэлых $n \geqslant 3$ вынайдзіце найбольшы цэлы лік k з наступнай уласцівасцю: на плоскасці знойдуцца n розных пунктаў $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для якіх існуе k розных перастаўленняў $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ такіх, што $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ добрая.

(Ломаная лінія $P_1P_2 \ldots P_n$ складаецца з адрэзкаў $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Задача T–5

Няхай Γ — апісаная акружнасць востракутнага трохкутніка ABC, у якім $AB > AC$. Пункт M — сярэдзіна меншай дугі BC акружнасці Γ, а пункт D — перасячэнне прамянёў AC і BM. Унутраная бісекрыса кута ACB перасякае апісаную акружнасць трохкутніка BDC у пункце $E \neq C$. Вядома, што пункт E знаходзіцца ўнутры трохкутніка ABC і існуе такі пункт N перасячэння лініі DE і акружнасці Γ, што пункт E — сярэдзіна адрэзка DN.

Дакажыце, што пункт N з'яўляецца сярэдзінай адрэзка $I_B I_C$, дзе I_B і I_C — цэнтры пазаўпісаных акружнасцяў трохкутніка ABC насупраць пунктаў B і C, адпаведна.

Задача T–6

Пункт O — цэнтр апісанай акружнасці Γ востракутнага трохкутніка ABC, у якім $AB \neq AC$. Датычныя, праведзеныя да акружнасці Γ праз пункты B і C перасякаюцца ў пункце D, а лініі AO і BC перасякаюцца ў пункце E. Пункт M — сярэдзіна адрэзка BC, а лінія AM перасякае акружнасць Γ паўторна ў пункце $N \neq A$. Нарэшце, $F \neq A$ — такі пункт акружнасці Γ, што пункты A, M, E і F належаць адной акружнасці. Дакажыце, што лінія FN перасякае адрэзак MD у сярэдзіне.

Задача T–7

Вынайдзіце ўсе цэлыя лікі $n \geqslant 2$ такія, што існуе перастаўленне $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ лікаў $0, 1, \ldots, n-1$ з наступнай уласцівасцю: сярод n лікаў

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

няма роўных па модулю n.

Задача T–8

Для цэлага ліку $n \geqslant 3$ праз $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ пазначым паслядоўнасць ступеней у кананічным раскладанні на простыя множнікі ліку $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, дзе $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ — простыя лікі.

Вызначце ўсе цэлыя лікі $n \geqslant 3$, для якіх $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — геаметрычная прагрэсія.