Problem T–1

Určete všechny dvojice polynomů (P, Q) s reálnými koeficienty takové, že rovnost

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

platí pro všechna reálná čísla x a y.

Problem T–2

Určete nejmenší reálnou konstantu C takovou, že nerovnost

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

platí pro všechna reálná čísla x, y a z splňující $x + y + z = -1$.

Problem T–3

Na každém políčku tabulky 2017×2017 je žárovka, která je buďto zapnutá, nebo vypnutá. Žárovku nazveme *šeroslepou*, pokud má sudý počet zapnutých sousedů. Jaký je nejmenší možný počet šeroslepých žárovek?

(Dvě žárovky považujeme za sousední, pokud jimi obsazená políčka sdílí hranu.)

Problem T–4

Ať $n \geqslant 3$ je kladné celé číslo. O posloupnosti $P_1, P_2, \ldots, P_n$ navzájem různých bodů v rovině řekneme, že je *správná*, pokud žádné tři z nich neleží v přímce, lomená čára $P_1P_2 \ldots P_n$ neprotíná samu sebe a pro každé $i = 1, 2, \ldots, n-2$ je trojúhelník $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orientovaný proti směru hodinových ručiček.

Pro každé celé číslo $n \geqslant 3$ určete největší celé číslo k s následující vlastností: Lze najít n po dvou různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v rovině, pro něž existuje k různých permutací $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ je správná.

(Lomená čára $P_1P_2 \ldots P_n$ sestává z úseček $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Problem T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$ s kružnicí opsanou k. Označme M střed kratšího oblouku BC kružnice k a D průsečík polopřímek AC a BM. Dále ať E ($E \neq C$) je průsečík osy úhlu ACB s kružnicí opsanou trojúhelníku BDC. Předpokládejme, že E leží uvnitř trojúhelníku ABC a lze najít společný bod N přímky DE a kružnice k takový, že E je středem úsečky DN.

Ukažte, že N je středem úsečky $I_B I_C$, kde I_B a I_C jsou středy kružnic připsaných trojúhelníku ABC postupně ke stranám AC a AB.

Problem T–6

Kružnici k se středem O je vepsán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| \neq |AC|$. Ke kružnici k sestrojme tečny v bodech B a C a jejich průsečík označme D. Dále protněme přímky AO a BC v bodě E, označme M střed úsečky BC a N ($N \neq A$) průsečík přímky AM s kružnicí k. Konečně sestrojme bod F ($F \neq A$) na kružnici k tak, aby body A, M, E a F ležely na jedné kružnici. Ukažte, přímka FN půlí úsečku MD.

Problem T–7

Určete všechna celá $n \geqslant 2$ taková, že čísla $0, 1, \ldots, n-1$ lze seřadit do posloupnosti $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ tak, aby součty

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

dávaly navzájem různé zbytky po dělení n.

Problem T–8

Pro celé číslo $n \geqslant 3$ definujeme posloupnost $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jako posloupnost exponentů v provčíselném rozkladu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ jsou prvočísla.

Určete všechna celá čísla $n \geqslant 3$, pro něž je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ geometrická posloupnost.