Aufgabe T–1

Bestimme alle Paare von Polynomen (P, Q) mit reellen Koeffizienten, die

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

für alle reellen Zahlen x und y erfüllen.

Aufgabe T–2

Bestimme die kleinstmögliche reelle Konstante C, sodass die Ungleichung

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

für alle reellen Zahlen x, y, z mit $x + y + z = -1$ gilt.

Aufgabe T–3

Auf jedem Feld eines quadratischen 2017×2017-Bretts ist eine Lampe. Jede Lampe ist entweder eingeschaltet oder ausgeschaltet. Eine Lampe heißt *zwielichtig*, wenn sie eine gerade Anzahl von eingeschalteten Nachbarn hat. Was ist die kleinstmögliche Anzahl von zwielichtigen Lampen auf einem solchen Brett?

(Zwei Lampen sind Nachbarn, wenn ihre Felder eine gemeinsame Seite haben.)

Aufgabe T–4

Sei $n \geqslant 3$ eine ganze Zahl. Eine Folge P_1, P_2, $\ldots$, P_n von verschiedenen Punkten in der Ebene wird *gut* genannt, wenn keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen, der Kantenzug $P_1P_2 \ldots P_n$ sich nicht selbst überschneidet und das Dreieck $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n-2$ gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.

Bestimme für jede ganze Zahl $n \geqslant 3$ die größtmögliche ganze Zahl k mit der folgenden Eigenschaft: Es existieren n verschiedene Punkte A_1, A_2, $\ldots$, A_n in der Ebene, für die es k verschiedene Permutationen $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, sodass $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $\ldots$, $A_{\sigma(n)}$ gut ist.

(Ein Kantenzug $P_1P_2 \ldots P_n$ besteht aus den Strecken P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$, $P_{n-1}P_n$.)

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

Aufgabe T–5

Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AB > AC$ und Umkreis Γ. Sei M der Mittelpunkt des kürzeren Kreisbogens BC von Γ, und sei D der Schnittpunkt der Strahlen AC und BM. Sei $E \neq C$ der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden (= Winkelsymmetrale) des Winkels $\sphericalangle ACB$ mit dem Umkreis des Dreiecks BDC. Nehmen wir an, dass E im Inneren des Dreiecks ABC liegt, und ein Schnittpunkt N der Geraden DE mit dem Kreis Γ existiert, sodass E der Mittelpunkt der Strecke DN ist.

Zeige, dass N der Mittelpunkt der Strecke $I_B I_C$ ist, wobei I_B und I_C die Ankreismittelpunkte von ABC gegenüber von B bzw. C sind.

Aufgabe T–6

Sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AB \neq AC$, Umkreismittelpunkt O und Umkreis Γ. Die Tangenten an Γ in B und C schneiden einander in D, und die Gerade AO schneide BC in E. Sei M der Mittelpunkt von BC, und schneide AM den Kreis Γ ein weiteres Mal in $N \neq A$. Schließlich sei $F \neq A$ ein Punkt auf Γ, für den A, M, E und F auf einem Kreis liegen. Zeige, dass FN die Strecke MD halbiert.

Aufgabe T–7

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geqslant 2$, für die es eine Permutation $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ der Zahlen $0, 1, \ldots, n-1$ gibt, sodass die n Zahlen

$$x_0, \qquad x_0 + x_1, \qquad \ldots, \qquad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

paarweise verschieden modulo n sind.

Aufgabe T–8

Für eine ganze Zahl $n \geqslant 3$ definieren wir die Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ als die Folge der Exponenten in der Primfaktorzerlegung von $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ Primzahlen sind.

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geqslant 3$, für die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ eine geometrische Folge ist.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.