Problème T–1

Déterminer toutes les paires (P, Q) de polynômes à coefficients réels qui satisfont l'équation

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

pour tous nombres réels x et y.

Problème T–2

Déterminer la plus petite constante réelle possible C telle que l'inégalité

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

soit vérifiée pour tous nombres réels x, y, z satisfaisant $x + y + z = -1$.

Problème T–3

Sur chaque case d'un échiquier 2017×2017 se trouve une lampe. Chaque lampe est soit allumée soit éteinte. Une lampe est appelée *mauvaise* si elle a un nombre pair de voisines allumées. Quel est le plus petit nombre possible de mauvaises lampes sur un tel échiquier ?

(Deux lampes sont voisines si leurs cases respectives ont un côté commun.)

Problème T–4

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de points distincts dans le plan est appelée *bonne* si trois points de cette suite ne sont jamais colinéaires, la ligne brisée $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ne s'auto-intersecte pas et le triangle $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour tous $i = 1, 2, \ldots, n - 2$.

Déterminer pour chaque entier $n \geqslant 3$ le plus grand entier possible k ayant la propriété suivante : Il existe n points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans le plan pour lesquels il y a k permutations distinctes $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ telles que $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ est une bonne suite.

(Une ligne brisée $P_1P_2 \ldots P_n$ consiste en les segments $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Durée: 5 heures
Temps pour les questions: 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.

Problème T–5

Soit ABC un triangle aigu avec $AB > AC$ et de cercle circonscrit Γ. Soit M le milieu du plus petit arc BC de Γ et soit D l'intersection des cordes AC et BM. Soit $E \neq C$ l'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle ACB avec le cercle circonscrit au triangle BDC. Supposons que E est à l'intérieur du triangle ABC et qu'il existe une intersection N de la droite DE avec le cercle Γ telle que E est le milieu du segment DN.

Prouver que N est le milieu du segment I_BI_C, avec I_B et I_C les centres des cercles exinscrits à ABC, opposés aux sommets B et C respectivement.

Problème T–6

Soit ABC un triangle aigu avec $AB \neq AC$, Γ son cercle circonscrit et O le centre de Γ. Soit D l'intersection des tangentes à Γ passant respectivement par B et C et soit E l'intersection des droites AO et BC. Soit M le milieu de BC et $N \neq A$ la deuxième intersection de AM avec Γ. Enfin, soit $F \neq A$ un point sur Γ tel que A, M, E et F sont sur un cercle. Prouver que FN coupe le segment MD en son milieu.

Problème T–7

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels qu'il existe une permutation $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ des nombres $0, 1, \ldots, n-1$ avec la propriété que les n nombres

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

sont deux à deux distincts modulo n.

Problème T–8

Pour un entier $n \geqslant 3$ on définit la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ comme la suite des exposants dans la décomposition en facteurs premiers $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, où $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sont des nombres premiers.

Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sont en progression géométrique.