Zadatak T–1

Odredite sve parove polinoma (P, Q) s realnim koeficijentima takve da

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

vrijedi za sve realne brojeve x i y.

Zadatak T–2

Odredite najmanju moguću realnu konstantu C takvu da nejednakost

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

vrijedi za sve realne brojeve x, y, z takve da vrijedi $x + y + z = -1$.

Zadatak T–3

Na svakom polju ploče 2017×2017 nalazi se žarulja. Svaka žarulja je upaljena ili ugašena. Žarulja je *loša* ako ima paran broj upaljenih susjednih žarulja. Koji je najmanji mogući broj loših žarulja na takvoj ploči?

(Dvije žarulje su susjedne ako njihova pripadna polja dijele stranicu.)

Zadatak T–4

Neka je $n \geqslant 3$ prirodni broj. Niz $P_1, P_2, \ldots, P_n$ različitih točaka u ravnini je *dobar* ako nikoje tri od njih nisu kolinearne, poligonalna linija $P_1P_2 \ldots P_n$ ne siječe samu sebe, te je trokut $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orijentiran u smjeru suprotnom od kazaljke na satu za svaki $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ odredite najveći mogući prirodni broj k sa svojstvom: postoji n različitih točaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ u ravnini za koje postoji k međusobno različitih permutacija $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da je niz $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ dobar.

(Poligonalna linija $P_1P_2 \ldots P_n$ se sastoji od dužina $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$.)

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji vrijedi $|AB| > |AC|$ i neka je Γ kružnica opisana tom trokutu. Neka je M polovište kraćeg luka BC kružnice Γ, te neka je D sjecište polupravaca AC i BM. Neka je $E \neq C$ sjecište unutarnje simetrale kuta ACB i kružnice opisane trokutu BDC. Pretpostavimo da je E unutar trokuta ABC i da postoji sjecište N pravca DE i kružnice Γ takvo da je E polovište dužine $\overline{DN}$.

Dokažite da je N polovište dužine $\overline{I_B I_C}$, pri čemu su I_B i I_C redom središta kružnica pripisanih trokutu ABC nasuprot B i C.

Zadatak T–6

Neka je ABC šiljastokutni trokut za koji vrijedi $|AB| \neq |AC|$, te neka je Γ kružnica opisana tom trokutu sa središtem O. Tangente kroz B i C na kružnicu Γ sijeku se u točki D, a pravac AO siječe pravac BC u točki E. Neka je M polovište dužine $\overline{BC}$ i neka pravac AM siječe kružnicu Γ drugi put u točki $N \neq A$. Konačno, neka je $F \neq A$ točka na kružnici Γ takva da su točke A, M, E i F konciklične. Dokažite da pravac FN raspolavlja dužinu $\overline{MD}$.

Zadatak T–7

Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 2$ za koje postoji permutacija $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ brojeva 0, 1, …, $n-1$ takva da n brojeva

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

daje međusobno različite ostatke pri dijeljenju s n.

Zadatak T–8

Za prirodni broj $n \geqslant 3$ definiramo niz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kao niz eksponenata u rastavu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, pri čemu su brojevi $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ prosti.

Odredite sve prirodne brojeve $n \geqslant 3$ takve da je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ geometrijski niz.

Vrijeme: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.