T–1. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan (P, Q) valós együtthatós polinompárt, melyre

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

fennáll minden x és y valós szám esetén.

T–2. Feladat

Határozzátok meg a lehető legkisebb C valós konstanst, melyre az

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan x, y, z valós számokra, melyekre $x + y + z = -1$ fennáll.

T–3. Feladat

Egy 2017×2017-es táblázat minden egyes mezőjében egy lámpa van. Minden lámpa vagy világít, vagy nem. Egy lámpát *rossz*nak nevezünk, ha páros sok szomszédja világít. Mennyi lehet a lehető legkevesebb rossz lámpa egy ilyen táblán?

(Két lámpa szomszédos, ha a mezőiknek van közös oldal.)

T–4. Feladat

Legyen $n \geqslant 3$ egész szám. A sík különböző $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pontjainak sorozatát *jó*nak hívjuk, ha semelyik három nem esik egy egyenesre, a $P_1P_2 \ldots P_n$ töröttvonal nem metszi önmagát, valamint a $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ háromszög pozitív körüljárású minden $i = 1, 2, \ldots, n-2$ esetén.

Minden $n \geqslant 3$ számra határozzátok meg a lehető legnagyobb k egész számot, melyre teljesül a következő feltétel: létezik n különböző $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pont a síkon melyeknek létezik k különböző olyan $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permutációja, amelyre $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ jó sorozat.

(A $P_1P_2 \ldots P_n$ töröttvonal a $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ szakaszokból áll.)

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melyre $AB > AC$. A háromszög körülírt köre legyen Γ. Legyen M a Γ kör rövidebbik BC ívének a felezőpontja, valamint D az AC és BM félegyenesek metszéspontja. Legyen E az $ACB\sphericalangle$ belső szögfelezőjének és a BDC háromszög körülírt körének C-től különböző metszéspontja. Tegyük fel, hogy E az ABC háromszög belső pontja, és hogy a DE egyenesnek és a Γ körnek van olyan N metszéspontja, hogy E a DN szakasz felezőpontja.

Mutassátok meg, hogy N az I_BI_C szakasz felezőpontja, ahol I_B, illetve I_C az ABC háromszög B-vel, illetve C-vel szemközti oldalához tartozó hozzáírt kör középpontja.

T–6. Feladat

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melyre $AB \neq AC$, és a Γ körülírt körének középpontja O. A Γ kört B és C pontban érintő egyenesek D pontban metszik egymást, valamint az AO és a BC egyenesek metszéspontja legyen E. Jelölje M a BC szakasz felezőpontját, valamint legyen N AM és Γ A-tól különböző metszéspontja. Végül legyen $F \neq A$ az a pont a Γ körön, melyre A, M, E és F egy körre illeszkednek. Bizonyítsátok be, hogy FN felezi az MD szakaszt.

T–7. Feladat

Határozzátok meg az összes olyan $n \geqslant 2$ egész számot, melyre létezik a $0, 1, 2, \ldots, n-1$ számoknak olyan $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ permutációja, hogy

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

n darab páronként különböző szám modulo n.

T–8. Feladat

Adott $n \geqslant 3$ egész számra definiáljuk az $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sorozatot a kitevők sorozataként $n!$ prímtényezős felbontásából: $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, ahol $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ prímek.

Határozzátok meg az összes olyan $n \geqslant 3$ egész számot, melyre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ mértani sorozat.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.