Užduotis T–1

Nustatykite visas daugianarių su realiaisiais koeficientais poras (P, Q), tenkinančias lygybę

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

su visais realiaisiais skaičiais x ir y.

Užduotis T–2

Nustatykite mažiausią galimą realiosios konstantos C reikšmę, kuriai nelygybė

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

galioja su visais x, y, z, tenkinančiais $x + y + z = -1$.

Užduotis T–3

Kiekviename 2017×2017 lentelės langelyje įtaisyta po lempą. Bet kuri lempa yra arba įjungta, arba išjungta. Lempą vadinsime *prasta*, jei įjungtų gretimų lempų skaičius yra lyginis. Kiek mažiausiai prastų lempų gali būti šioje lentelėje?

(Lempos yra gretimos, jei atitinkami jų langeliai turi bendrą kraštinę.)

Užduotis T–4

Nagrinėkime natūralųjį skaičių $n \geqslant 3$. Skirtingų plokštumos taškų seką $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vadinsime *puikia*, jei jokie trys taškai nėra vienoje tiesėje, laužtė $P_1P_2 \ldots P_n$ nekerta savęs, o kiekvieno iš trikampių $P_iP_{i+1}P_{i+2}$, kai $i = 1, 2, \ldots, n-2$, trys viršūnės čia nurodyta tvarka eina prieš laikrodžio rodyklę.

Kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant 3$ nustatykite didžiausią sveikąjį skaičių k, tenkinantį tokią sąlygą: plokštumoje egzistuoja n skirtingų taškų $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir k skirtingų keitinių $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ (t. y. tokių bijektyvių funkcijų), kuriems kiekviena seka $A_{\sigma(1)}$, $A_{\sigma(2)}$, $\ldots$, $A_{\sigma(n)}$ yra puiki.

(Laužtę $P_1P_2 \ldots P_n$ sudaro atkarpos $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.

Užduotis T–5

Duotas smailusis trikampis ABC su kraštinėmis $AB > AC$ ir apibrėžtiniu apskritimu Γ. Apskritimo Γ trumpesniojo lanko BC vidurio taškas pažymėtas M. Spinduliai AC ir BM kertasi taške D. Kampo ACB vidinė pusiaukampinė ir trikampio BDC apibrėžtinis apskritimas kertasi taške $E \neq C$, kuris yra trikampio ABC viduje. Tiesė DE ir apskritimas Γ kertasi tokiame taške N, kad taškas E dalija atkarpą DN pusiau.

Įrodykite, kad taškas N dalija atkarpą I_BI_C pusiau, kur I_B ir I_C yra trikampio ABC išorinių pusiaukampinių sankirtos taškai, priešingi atitinkamai viršūnėms B ir C.

Užduotis T–6

Duotas smailusis trikampis ABC su kraštinėmis $AB \neq AC$, jo apibrėžtinio apskritimo Γ centras pažymėtas O. Apskritimo Γ liestinės taškuose B ir C kertasi taške D. Tiesės AO ir BC kertasi taške E. Taškas M dalija atkarpą BC pusiau, o tiesė AM ir Γ kertasi taške $N \neq A$. Taškas $F \neq A$ yra toks apskritimo Γ taškas, kad taškai A, M, E ir F priklauso vienam apskritimui. Įrodykite, kad tiesė FN dalija atkarpą MD pusiau.

Užduotis T–7

Nustatykite visus natūraliuosius skaičius $n \geqslant 2$, kuriems visus skaičius $0, 1, \ldots, n-1$ galima surašyti tam tikra tvarka ir taip gauti seką $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, tenkinančią šią sąlygą: n skaičių

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

yra poromis skirtingi moduliu n.

Užduotis T–8

Kiekvienam natūraliajam skaičiui $n \geqslant 3$ apibrėžkime seką $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kaip rodiklių seką skaidinyje pirminiais daugikliais $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, kur skaičiai $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ yra pirminiai.

Nustatykite visus natūraliuosius skaičius $n \geqslant 3$, kuriems seka $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ yra geometrinė progresija.