Zadanie T–1

Wyznaczyć wszystkie pary (P, Q) wielomianów o współczynnikach rzeczywistych spełniające równość

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y.

Zadanie T–2

Wyznaczyć najmniejszą możliwą stałą rzeczywistą C taką, że nierówność

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających równość $x + y + z = -1$.

Zadanie T–3

Na każdym polu kwadratowej planszy o wymiarach 2017×2017 znajduje się lampa. Każda z lamp jest albo włączona, albo wyłączona. Powiemy, że lampa jest *zła*, jeżeli sąsiaduje z parzystą liczbą lamp włączonych. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba złych lamp na takiej planszy?

(Dwie lampy sąsiadują ze sobą, jeśli stoją na polach mających wspólny bok.)

Zadanie T–4

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Ciąg $P_1, P_2, \ldots, P_n$ różnych punktów na płaszczyźnie nazwiemy *dobrym* jeśli żadne trzy spośród tych punktów nie są współliniowe, łamana $P_1P_2 \ldots P_n$ nie ma samoprzecięć oraz dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n-2$ trójkąt $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ jest zorientowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą możliwą liczbę całkowitą k o następującej własności: istnieje n różnych punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na płaszczyźnie, dla których istnieje k różnych permutacji $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ takich, że ciąg $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ jest dobry.

(Łamana $P_1P_2 \ldots P_n$ składa się z odcinków $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.

Zadanie T–5

Niech Γ będzie okręgiem opisanym na trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB > AC$ oraz M — środkiem krótszego łuku BC okręgu Γ. Niech D będzie punktem przecięcia półprostych AC i BM oraz $E \neq C$ będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta ACB oraz okręgu opisanego na trójkącie BDC. Załóżmy, że punkt E leży wewnątrz trójkąta ABC oraz istnieje taki punkt N przecięcia prostej DE i okręgu Γ, że E jest środkiem odcinka DN.

Udowodnić, że N jest środkiem odcinka I_BI_C, gdzie I_B i I_C są odpowiednio środkami okręgów dopisanych do trójkąta ABC naprzeciwko punktów B i C.

Zadanie T–6

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB \neq AC$. Punkt O jest środkiem okręgu Γ opisanego na tym trójkącie. Proste styczne do Γ w punktach B i C przecinają się w punkcie D. Prosta AO przecina prostą BC w punkcie E. Oznaczmy środek odcinka BC przez M. Niech prosta AM przecina okrąg Γ w punkcie $N \neq A$. Niech $F \neq A$ będzie takim punktem leżącym na okręgu Γ, że punkty A, M, E i F leżą na jednym okręgu. Udowodnić, że prosta FN przechodzi przez środek odcinka MD.

Zadanie T–7

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których istnieje taka permutacja $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ liczb $0, 1, \ldots, n-1$, że następujące n liczb

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

daje parami różne reszty z dzielenia przez n.

Zadanie T–8

Dla liczby całkowitej $n \geqslant 3$ definiujemy ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jako ciąg wykładników w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, przy czym $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 3$, dla których ciąg $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest geometryczny.