Задача T–1

Найдите все пары (P, Q) многочленов с действительными коэффициентами, удовлетворяющих равенству
$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$
при всех действительных числах x и y.

Задача T–2

Найдите наименьшее действительное значение постоянной C такое, что неравенство
$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$
верно при всех действительных числах x, y, z, удовлетворяющих равенству $x + y + z = -1$.

Задача T–3

В каждой клетке квадратной доски 2017×2017 расположена лампочка. Каждая лампочка либо включена, либо отключена. Назовём лампочку плохой, если у неё чётное число соседних включенных лампочек. Какое минимальное число плохих лампочек может быть на доске?

(Две лампочки называются соседними, если соответствующие клетки имеют общую сторону.)

Задача T–4

Пусть $n \geqslant 3$ — целое число. Последовательность $P_1, P_2, \ldots, P_n$ различных точек на плоскости называется хорошей, если никакие три из них не лежат на одной прямой, ломаная $P_1P_2 \ldots P_n$ является несамопересекающейся, и треугольник $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ ориентирован против часовой стрелки для всех $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Для каждого целого $n \geqslant 3$ найдите наибольшее целое число k со следующим свойством: на плоскости найдутся n различных точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, для которых существуют k различных перестановок $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что последовательность $A_{\sigma(1)}A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(n)}$ хорошая.

(Ломаная $P_1P_2 \ldots P_n$ состоит из отрезков $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Время: 5 часов
Время для вопросов: 60 минут
Каждая задача оценивается в 8 баллов
Порядок задач не зависит от их сложности

Задача T–5

Пусть Γ — описанная окружность остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Точка M — середина меньшей дуги BC окружности Γ, а точка D — точка пересечения лучей AC и BM. Внутренняя биссектриса угла ACB пересекает описанную окружность треугольника BDC в точке $E \neq C$. Оказалось, что точка E лежит внутри треугольника ABC и существует такая точка N пересечения прямой DE и окружности Γ, что точка E — середина отрезка DN.

Докажите, что точка N является серединой отрезка I_BI_C, где I_B и I_C — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, лежащих напротив точек B и C, соответственно.

Задача T–6

Точка O — центр описанной окружности Γ остроугольного треугольника ABC со сторонами $AB \neq AC$. Касательные к окружности Γ, проведённые через точки B и C пересекаются в точке D, а прямые AO и BC пересекаются в точке E. Через M обозначим середину отрезка BC, а через $N \neq A$ — вторую точку пересечения прямой AM с окружностью Γ. Наконец, пусть точка $F \neq A$ — такая точка окружности Γ, что точки A, M, E и F лежат на одной окружности. Докажите, что прямая FN делит отрезок MD пополам.

Задача T–7

Найдите все целые числа $n \geqslant 2$ такие, что существует перестановка $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ чисел $0, 1, \ldots, n-1$, обладающая следующим свойством: n чисел

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

попарно различны по модулю n.

Задача T–8

Для целого числа $n \geqslant 3$ через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ обозначим последовательность степеней в каноническом разложении на простые множители числа $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ — простые числа.

Найдите все целые числа $n \geqslant 3$, для которых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — геометрическая прогрессия.