Úloha T–1

Nájdite všetky dvojice polynómov (P, Q) s reálnymi koeficientami spĺňajúce

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y)),$$

pre všetky reálne čísla x a y.

Úloha T–2

Nájdite najmenšiu možnú reálnu konštantu C takú, že nerovnosť

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

platí pre všetky reálne čísla x, y, z spĺňajúce $x + y + z = -1$.

Úloha T–3

Na každom políčku tabuľky 2017×2017 je lampa. Každá lampa je buď zapnutá, alebo vypnutá. Lampu nazývame *tônistá*, ak má párny počet zapnutých susedných lámp. Aký je najmenší možný počet *tônistých* lámp?

(Dve lampy sú susedné ak sa nachádzajú vedľa seba v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci danej tabuľky.)

Úloha T–4

Nech $n \geqslant 3$ je celé číslo. Postupnosť $P_1, P_2, \ldots, P_n$ rôznych bodov v rovine nazývame *prešibaná* ak žiadne tri body postupnosti neležia na jednej priamke, lomená čiara $P_1P_2 \ldots P_n$ nepretína samú seba, a pre každé $i = 1, 2, ..., n-2$ je trojuholník $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ orientovaný proti smeru hodinových ručičiek. Pre každé celé číslo $n \geqslant 3$ nájdite najväčšie celé číslo k s nasledovnou vlastnosťou: existuje n rôznych bodov $A_1, A_2, ..., A_n$ ležiacich v jednej rovine takých, že existuje k rôznych permutácií $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, pre ktoré postupnosť $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ je *prešibaná.* (Lomená čiara $P_1P_2 \ldots P_n$ pozostáva z úsečiek $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník taký, že $|AB| > |AC|$ a Γ je kružnica jemu opísaná. Stred kratšieho oblúka BC kružnice Γ označme M a priesečník polpriamok AC a BM označme D. Nech $E \neq C$ je priesečník vnútornej osi uhla ACB a kružnice opísanej trojuholníku BDC. Predpokladajme, že bod E leží vo vnútri trojuholníka ABC a existuje priesečník N priamky DE s kružnicou Γ taký, že E je stred úsečky DN. Dokážte, že N je stred úsečky $I_B I_C$, kde I_B, I_C sú po rade stredy kružníc pripísaných ABC oproti vrcholom B a C.

Úloha T–6

Nech Γ je kružnica so stredom v bode O opísaná ostrouhlému trojuholníku ABC, pre ktorý platí, že $|AB| \neq |AC|$. Dotyčnice ku kružnici Γ v bodoch B a C sa pretínajú v bode D. Nech priamka AO pretína BC v bode E. Označme M stred úsečky BC a $N \neq A$ priesečník priamky AM a kružnice Γ. Nech $F \neq A$ je bod ležiaci na Γ taký, že A, M, E, F ležia na jednej kružnici. Dokážte, že priamka FN rozpoľuje úsečku MD.

Úloha T–7

Nájdite všetky kladné celé čísla $n \geqslant 2$ také, že existuje usporiadanie $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ čísel $0, 1, \ldots, n-1$ také, že súčty

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení n.

Úloha T–8

Pre celé číslo $n \geqslant 3$ definujeme postupnosť $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ ako postupnosť exponentov v prvočíselnom rozklade $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, kde $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sú prvočísla.

Nájdite všetky celé čísla $n \geqslant 3$, pre ktoré je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ geometrická postupnosť.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.