Naloga T–1

Določi vse pare polinomov (P, Q) z realnimi koeficienti, za katere velja

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y))$$

za vsa realna števila x in y.

Naloga T–2

Določi najmanjšo možno realno konstanto C, da neenakost

$$|x^3 + y^3 + z^3 + 1| \leqslant C|x^5 + y^5 + z^5 + 1|$$

velja za vsa realna števila x, y, z, ki izpolnjujejo pogoj $x + y + z = -1$.

Naloga T–3

V vsakem polju kvadratne tabele velikosti 2017×2017 stoji žarnica. Vsaka žarnica bodisi sveti bodisi ne sveti. Žarnica je *hudobna*, če ima sodo število sosed, ki svetijo. Kolikšno je najmanjše možno število hudobnih žarnic v takšni tabeli?

(Žarnici sta sosedi, če imata skupno stranico.)

Naloga T–4

Naj bo $n \geqslant 3$ celo število. Zaporedje $P_1, P_2, \ldots, P_n$ različnih točk v ravnini je *prijetno*, če nobene tri ne ležijo na isti premici, lomljena črta $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ne seka sama sebe in je trikotnik $P_i P_{i+1} P_{i+2}$ orientiran v nasprotni smeri urinega kazalca za vsak $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Za vsako celo število $n \geqslant 3$ določi največje celo število k z naslednjo lastnostjo: obstaja n različnih točk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ v ravnini ter k različnih permutacij $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, za katere je zaporedje $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ prijetno.

(Lomljena črta $P_1 P_2 \ldots P_n$ je sestavljena iz daljic $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$.)

Naloga T–5

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, kjer $|AB| > |AC|$ in Γ njegova očrtana krožnica. Naj bo M razpolovišče krajšega loka BC krožnice Γ in D presečišče poltrakov AC in BM. Naj bo $E \neq C$ presečišče notranjega razpolovišča kota ACB in očrtane krožnice trikotnika BDC. Denimo, da E leži znotraj trikotnika ABC in obstaja presečišče N premice DE in krožnice Γ, da je E razpolovišče daljice DN. Dokaži, da je N razpolovišče daljice I_BI_C, kjer sta I_B in I_C središči pričrtanih krožnic ABC zaporedoma nasproti B in C.

Naloga T–6

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, kjer $|AB| \neq |AC|$, Γ njemu očrtana krožnica in O njeno središče. Tangenti na Γ skozi B in C se sekata v D, premici AO in BC pa se sekata v E. Naj bo M razpolovišče BC ter $N \neq A$ drugo presečišče AM in Γ. Naj bo $F \neq A$ takšna točka na Γ, da A, M, E in F ležijo na isti krožnici. Dokaži, da FN razpolavlja daljico MD.

Naloga T–7

Določi vsa naravna števila $n \geqslant 2$, za katera obstaja permutacija $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ števil $0, 1, \ldots, n-1$ z lastnostjo, da so števila

$$x_0, \quad x_0 + x_1, \quad \ldots, \quad x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

paroma različna po modulu n.

Naloga T–8

Za naravno število $n \geqslant 3$ definiramo zaporedje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ kot zaporedje eksponentov v praštevilskem razcepu $n! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, kjer so $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ praštevila.

Določi vsa naravna števila $n \geqslant 3$, za katera je $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ geometrijsko zaporedje.